SERII COMPLEXE

A. Seria Laurent. Această teorie este necesară pentru pregătirea teoremei reziduurilor

1. Preliminarii. În acest paragraf ne punem de acord cu terminologia.

Convergenţa absolută a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \Leftrightarrow \text{convergenţa seriei } \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ nu este convergentă atunci spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este *semiconvergentă.*

Observaţie. Cu criteriul lui Cauchy se observă că orice serie absolut convergentă este convergentă (sau criteriul comparaţiei.).

Fie $(u_n(z))_{n\geq 1}, u_n : E \to C, E \subseteq C.$

Notăm $E_c = \{z \in E / (u_n(z))_{n\geq 1}$ este şir convergent$\}$. E_c se numeşte mulţimea de convergenţă a şirului de funcţii.

În general, rapiditatea de convergenţă în E_c diferă de la un punct la altul.

În cazul în care rapiditatea este aceeaşi, adică

$(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)N(\varepsilon)$ astfel încât $(\forall)z \in E_c$ şi $(\forall)n \geq N(\varepsilon)$

$|u_n(z) - u(z)| < \varepsilon$ spunem că u_n converge uniform la u.

Scriem $u_n \xrightarrow{\text{c.u.}} u.$

Cealaltă convergenţă este convergenţă simplă şi notăm $u_n \xrightarrow{\text{c.s.}} u.$

Dacă $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ şi $S_n(z) \to S(z)$ spunem că seria de funcţii este convergentă. $S(z) - S_n(z) = R_n(z)$ se numeşte restul seriei şi pe E_c, $R_n(z) \to 0.$

Dăm fără demonstraţie următoarea

Teoremă. Dacă u_n sunt funcţii continue pe E şi $S_n \xrightarrow{u} S$ pe E atunci

(i) suma seriei S este continuă pe E.

(ii) dacă arcul $AB \subseteq E$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{AB} u_n$ este convergentă şi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{AB} u_n = \int_{AB} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

O **serie de puteri** sau **serie întreagă** este o serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{cu} \quad c_n, a, z \in C.$$

Forma domeniului de convergenţă a seriei de puteri se deduce din:

Teorema lui Abel; Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ este convergentă în z_0 şi divergentă în z_1, atunci ea este convergentă în interiorul cercului $|z| < |z_0|$ şi divergentă în domeniul $|z| > |z_1|$.

Demonstraţie. Vom nota $R = \sup_{z \in E_c} |z|$ şi numim raza de convergenţă a seriei de puteri.

Conform teoremei lui Abel seria de puteri este convergentă în interiorul cercului de convergenţă (cercul de rază R) şi divergenţă în exterior. Pe cerc, în unele puncte avem convergenţă în altele divergenţă.

Pentru calculul razei de convergenţă este suficient să deducem marginea superioară a punctelor de convergenţă de pe semiaxa reală pozitivă R, adică să calculăm raza de convergenţă a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n, x \in R$, care ştim de la seriile de puteri reale că este:

$$R = \frac{1}{l} \text{ unde } l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|, \quad c_n \neq 0 \text{ sau } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

B. Seria Taylor.

Fie f o funcţie olomorfă într-un domeniu D şi $C(\rho, a) \subseteq D$, cercul de centru a şi de rază ρ.

Teoremă. Oricare ar fi z cu $|z-a| = r < \rho$,

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + ... + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(z)$$

(numită formula lui Taylor a funcţiei f(z) în punctul z = a).

Demonstraţie. Din formula integrală a lui Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u-z} du$$

oricare ar fi z cu $|z-a| = r < \rho = |u-a|$.

C. Seria Laurent.

Fie f(z) o funcţie olomorfă într-un domeniu multiplu conex D şi o

coroană circulară Δ cu centrul în a, $\Delta: \ \rho_2 < |z-a| < \rho_1$ având frontiera formată din cercurile Γ_1 şi Γ_2 , de ecuaţii $|u-a| = \rho_1, \ |u-a| = \rho_2$.

Vom presupune că $\Delta, \Gamma_1, \Gamma_2$ sunt conţinute în D, şi f(z) nu este olomorfă în interiorul cercului Γ_1.

Căutăm pentru f(z) o dezvoltare în serie, în care vor exista şi puteri negative ale lui z-a, valabilă în coroana circulară Δ.

Conform formulei lui Cauchy referitoare la domenii multiplu conexe, pe Δ avem:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(u)}{u-z}du - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(u)}{u-z}du$$

Pentru integrala pe Γ_1, unde avem: $|z-a| < |u-a|$, dezvoltarea în serie geometrică a lui $\frac{1}{u-z}$ decurge ca în cazul seriei Taylor, deci vom obţine şi aici:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(u)du}{u-z} = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

cu expresii analoage pentru coeficienţi

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(u)du}{(u-a)^{n+1}}$$

valorile c_n neexprimându-se cu ajutorul derivatelor, deoarece f(z) nu este olomorfă în interiorul cercului Γ_1 .

Observaţie. $(\forall)z \in \Delta, f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ serie care se numeşte **seria Laurent a funcţiei f(z) relativă la coroana Δ de centru z = a.**

Partea formată cu puterile negative se numeşte **partea principală** a seriei Laurent, iar cea de-a doua, partea întreagă sau partea **tayloriană**.

Puncte singulare

Clasificarea punctelor singulare izolare în funcţie de diferite "forme" ale seriei Laurent.

a) Dacă seria Laurent nu conţine decât partea tayloriană, deci $a_n = 0$ pentru n=-1,-2,…, atunci există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$ şi singularitatea nu provine decât din faptul că valoarea lui f în z_0 este diferită de c_0.

În acest caz singularitatea în z_0 se poate înlătura, modificând valoarea lui f în z_0 luând

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Din acest motiv o numim **singularitate înlăturabilă**.

b) Dacă partea principală conţine p termeni, z_0 este pol de ordine p.

c) Când partea principală are o infinitate de termeni, punctul z_0 se numeşte punct singular esenţial.

Serii importante: **Seria geometrică.**

$$1 + z + z^2 + ... + z^n + ... = \frac{1}{1-z} \quad \text{cu } R = 1 \qquad (1)$$

Funcţiile e^z, sin z, cos z, au următoarele serii:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... \quad \text{cu } R = \infty$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} \quad \text{cu } R = \infty$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{cu } R = \infty$$

Seria binomială: Pentru $|z| < 1$ avem dezvoltarea

$$(1+z)^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!} z + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} z^n + \ldots \quad \text{unde } \lambda \in R.$$

Dacă $\lambda \in Z$ atunci egalitatea are loc.

Dacă λ este fracţionar sai iraţional, atunci membrul întâi este o funcţie multiformă, iar suma seriei din partea dreaptă este o funcţie uniformă. Egalitatea va avea loc dacă în partea stângă luăm determinarea care se reduce la 1 pentru z = 0.

Aplicaţii:

1. Determinaţi raza de convergenţă a seriei

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$$

şi studiaţi comportarea seriei pe cercul de convergenţă.

R : Dacă $l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right| = 1,$ atunci $R = \frac{1}{l} = 1.$ Seria este absolut convergentă în domeniul $|z| < 1.$

Pe cercul de convergenţă $z = \cos\theta + i \sin\theta$, seria devine

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos k\theta}{k^2}+i\frac{\sin k\theta}{k^2}\right)$$

Cu criteriul comparaţiei, seriile: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\theta}{k^2}$ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{k^2}$ sunt convergente

deoarece $\left|\frac{\cos k\theta}{k^2}\right|<\frac{1}{k^2}$ $\left|\frac{\sin k\theta}{k^2}\right|<\frac{1}{k^2}$ şi seria armonică este convergentă.

Deci seria converge pe $|z|\le 1$.

2. Aflaţi razele de convergenţă ale seriilor:

2.1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}z^n$ R: 2

2.2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}z^n$ R: $\frac{1}{e}$

2.3. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ R: $\frac{1}{e}$

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin inz^n$ R: $\frac{1}{e}$

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha z^n$, cu $\alpha = a+ib$, R : e^b

3. Dacă $c_n \in R, c_n \setminus 0$ şi raza de convergenţă a seriei este 1, atunci $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ este convergentă pe cercul $|z|=1$, excepţie ar putea să facă z =1 (Rezultatul îi aparţine lui Picard).

Soluţie: Să arătăm că $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_k z^k$ este şir Cauchy.

$$(z-1)(S_{n+p}(z)-S_n(z)=-c_{n+1}z^{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(c_k-c_{k+1}\right)z^{k+1}+c_{n+p}z^{n+p+1}$$

$$|z-1|\left|S_{n+p}(z)-S_n(z)\right|\le C_{n+1}|z|^{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(C_k-C_{k+1}\right)|z|^{k+1}+C_{n+p}|z|^{n+p+1}$$

Cum $|z|=1, z\neq 1,$ deducem că

$$\left|S_{n+p}(z)-S_n(z)\right|\le\frac{1}{|z-1|}\left(C_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left(C_k-C_{k+1}\right)+C_{n+p}\right)=\frac{2C_{n+1}}{|z-1|}\to 0$$

4. Determinaţi mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii:

4.1. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$ $\qquad$ $R:|z|=1$ (inclusiv z = 1)

4.2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}z^n$ $\qquad$ $R:|z|=1$ (inclusiv z = 1)

4.3. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ $\qquad$ $R:|z|=1\setminus\{z=1\}$

4.4. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{n}$ $\qquad$ $R:|z|=1\setminus\{z=1\}$

Indicaţie:

Metoda I, cu rezultatul Picard.

Metoda a II-a. Studiem seriile obţinute scriind

$$z=\cos\theta+i\sin\theta,$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$$

5. Arătaţi că:

5.1. $f_1(z)=\sum_{n+1}^{\infty} nz^{n-1}=\frac{1}{(1-z)^2}$

5.2. $f_2(z)=\sum_{n+1}^{\infty} n^2z^n=\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$

5.3. $f_3(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{z^{n+1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$ pe domeniul $\{z|z|<1\}$

R: Cele trei serii fiind uniform convergente de domeniul $|z|<1,$ sunt valabile teoremele de derivare şi integrare termen cu termen.

5.1. $\int f_1(z)dz=\frac{z}{1-z}+C\Rightarrow f_1(z)=\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}$

5.2. $f_2(z)=z\sum_{n=1}^{\infty} n^2z^{n-1}$

$$\int\frac{f_2(z)}{z}dz=c+z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}=C+\frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\frac{1}{z}f_2(z)=\frac{1+z}{(1-z)^3}$$

5.3. $f'(z)=\frac{1}{1-z^2}$

6. Scrieţi seriile Taylor în jurul punctelor indicate :

6.1. $f(z)=\frac{z+3}{z^2-8z+15},\ z=4$

6.2. $f(z)=\dfrac{z-1}{z-2}$, $z=0$, $z=i$

6.3. $f(z)=(1+z)^{\frac{1}{z}}$, $z=0$

6.4. $f(z)=\dfrac{z^2+4z+1}{-z^3-2z^2+z+2}$, $z=0$, $z=\pm 1$, $z=2.$

6.5. $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z=1$

Soluţii:

6.1. Cu substituţia $z-4=u$, pentru $|u|<1$ avem

$$f(z)=f(u(z))=\frac{u+7}{u^2-1}=-(u+7)\frac{1}{1-u^2}=-(u+7)\sum_{u=0}^{\infty}u^{2n};\ \text{R=1}$$

6.2. a) $f(z)=1+\dfrac{1}{z-2}=1-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$; $R=2$

b)

$$f(z)=1+\frac{1}{z-i+i-2}=1+\frac{1}{i-2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-i}{i-2}}=$$

$$=1+\frac{1}{i-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{i-2}\right)^2;\quad R=\sqrt{5}$$

6.3.

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}\ln(1+z)}=e^{\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}...\right)}=e\cdot e^{\left(-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{3}+...\right)}=$$

$$=e\left(1+\frac{1}{1!}\left(-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+...\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+...\right)^2...\right)=$$

$$=e\left(1-\frac{z}{2}+\frac{11}{24}z^2...\right),\ |z|<1$$

Am ţinut cont de faptul că

$$\ln(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots, \quad \text{şi} \quad e^z=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\dots$$

6.4. $f(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2+z}-\frac{1}{1+z}$

În discursul $|z|<1$, din

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad \frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad \frac{1}{2+z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

obţinem:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-1)^n+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n$$

Pentru dezvoltarea în jurul lui z = -1 avem:

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}+\frac{1}{1+(z+1)}-\frac{1}{1+z}$$

Dacă $|z+1|<1$ atunci $\left|\frac{z+1}{2}\right|<1$ şi avem:

$$\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n, \quad \frac{1}{1+(z+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n \quad \text{şi deci}$$

$$f(z)=-\frac{1}{1+z}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}(z+1)+\frac{9}{8}(z+1)^2-\frac{15}{16}(z+1)^3\dots$$

Pentru dezvoltarea în jurul lui z = 1 avem:

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

Dacă $|z-1|<1$ atunci $\frac{|z-1|}{2}<1, \ \frac{|z-1|}{3}<1$ şi deci

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) (z-1)^n$$

Pentru dezvoltarea în jurul lui z=2, pentru $|z-2| < 1$ avem

$$\frac{1}{1+(z-2)}, \quad \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}, \quad \text{şi} \quad \frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}$$

se dezvoltă corespunzător şi avem:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) (z-2)^n$$

6.5. $\sin\frac{z}{z-1} = \sin\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \sin 1 \cos\frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin\frac{1}{z-1}$

Din faptul că:

$$\sin\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z-1} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} + \ldots$$

$$\cos\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}}$$

obţinem:

$$\sin\frac{z}{z-1} = \sin 1 + \frac{\cos 1}{z-1} - \frac{\sin 1}{2!(z-1)^2} - \frac{\cos 1}{3!(z-1)^3} + \ldots +$$
$$+ (-1)^n \frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + (-1)^n \frac{\mathrm{coa}1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} + \ldots$$

7. Fie

$$f(z) = \frac{2z-1}{z^2 - z - 6}$$

Dezvoltaţi după puterile lui z în domeniile:

7.1. $|z| < 2$

7.2. $2 < |z| < 3$

7.3. $|z| > 3$

Soluţie: Descompunând în fracţii simple, avem

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-3}$$

şi pe fiecare din cele trei domenii, folosim dezvoltarea în serie geometrică:

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + ...+,$$

convergentă pentru $|q| < 1.$

Obţinem astfel seria Taylor

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n$$

dacă $\left|\frac{z}{2}\right| < 1,$ deci $|z| < 2;$ seria Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} ((-2)^n + 3^n) \frac{1}{z^{n+1}}$$

dacă $|z| > 3.$

8. Să se găsească pe domeniile circulare $|z| < 1,\ 1 < |z| < 2,\ |z| > 2$ seriile de puteri în z ale funcţiei

$$f(z) = \frac{2z^2 - 3z + 2}{z^3 - 2z^2 + z - 2}$$

Soluţie: f(z) ale polii $z = 2, z = \pm i.$

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{z-1}{z^2+1}$$
$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\dots$$

dacă $|z|<2$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\dots+\frac{2^n}{z^n+1}+\dots$$

dacă $|z|>2$

$$\frac{z-1}{z^2+1}=(z-1)\cdot\frac{1}{1+z^2}=-1+z+z^2-z^3-z^4+\dots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(z^{2n}-z^{2n+1}\right)$$

dacă $|z|<1.$

$$\frac{z-1}{z^2+1}=\frac{1}{2^2}(-1+z)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^5}\dots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{z^{2n}}\right)$$

dacă $|z|>1.$ Ţinând seama de aceste dezvoltări, obţinem trei dezvoltări diferite ale lui f corespunzătoare celor trei domenii.

9. Să se găsească dezvoltările în jurul punctului $z=\infty$ ale funcţiilor

9.1. $f(z)=\dfrac{1}{z^5-z^2}$

9.2. $f(z)=\dfrac{z^{15}}{\left(z^2+1\right)\left(z^4-16\right)}$

9.3. $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$

9.4. $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$

9.5. $f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}$

9.6. $f(z) = e^{\frac{2z}{z+1}}$

şi să se indice natura acestui punct, ţinând seama de forma dezvoltării.

Soluţie: A dezvolta funcţia f(z) în jurul lui $z = \infty$, înseamnă a găsi o serie de puteri ale lui z ale acestei funcţii, convergentă în exteriorul unui cerc de rază arbitrar de mare. Dacă această serie conţine:

a) numai puteri negative, $z = \infty$ este punct arbitrar b) punct singular în caz contrar

b) pol dacă numărul termenilor cu puteri pozitive este finit

c) punct singular esenţial izolat în caz contrar (dacă numărul termenilor de puteri pozitive este finit)

9.1. $f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z^3 - 1}$ (care s-ar dezvolta pentru $|z| < 1$. Dar noi avem nevoie de dezvoltare în jurul lui $z = \infty$ deci pentru $|z| > 1$. De aceea vom scrie în continuare astfel).

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z^3}} = \frac{1}{z^5}\left(1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + ...\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{5+3n}}, |z| > 1.$$

$z = \infty$ este punct ordinar.

9.2.

$$f(z)=\frac{z^{15}}{z^{10}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^5\cdot z^4\cdot\left(1-\frac{16}{z^4}\right)}=z\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}\right)^5\cdot\frac{1}{1-\frac{16}{z^4}}=$$
$$=z\left(1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3},-...\right)^5\left(1+\frac{16}{z^4}+\frac{16^2}{z8}+...\right)$$

$\left|\frac{2}{z}\right|<1\to|z|>2$ $z=\infty$ este pol simplu.

9.3. $f(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$ coincide potrivit definiţiei cu dezvoltarea sa în jurul lui $z=\infty$ care este polinom de ordinul n.

9.4. $f(z)=z^3\left(\frac{1}{1!z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-...\right)=z^2-\frac{1}{6}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n-2}}$

$z=\infty$ este pol de ordinul doi.

9.5. Dezvoltăm în jurul lui $z=\infty$ derivata funcţiei f(z).

$$f'(z)=\frac{a-b}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{z}}-\frac{1}{1-\frac{b}{z}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{z^{n+1}}$$

pentru $|z|>\max\left(|a|,|b|\right)$. Revenind la funcţia iniţială obţinem:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n-b_n}{n}\cdot\frac{1}{z^n}+C$$

Cum

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}\ln\frac{z-a}{z-b}=i2k\pi=C$$

$$\ln\frac{z-a}{z-b}=i2k\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{n}\cdot\frac{1}{z^n},|z|>\max\left(|a|,|b|\right)$$

şi $z = \infty$ este punct ordinar.

9.6.

$$e^{\frac{2z}{z+1}} = e^{\frac{2}{1+z}} = e^{2(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+...)} =$$

$$= e^2\left(1+\frac{2}{1!}(-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3}+...)+\frac{4}{2!}(-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-...)^2+...\right)$$

pentru $|z| > 1$. Deci $z = \infty$ este punct ordinar.